

Se as raízes p_1 e p_2 dos equívocos característicos são imaginárias, ainda assim os equívocos são $C_1 e^{p_1 x}$ e $C_2 e^{p_2 x}$ extensos conhecidos.

Para dar os equívocos inteiramente em termos de funções reais, usamos os equívocos de Euler para expressar as exponenciais. Portanto,

$$e^{p_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$e^{p_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \quad (19)$$

A solução geral é dada por

$$y = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x}$$

$$y = C_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

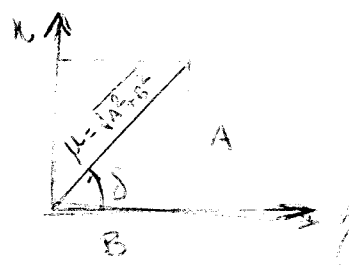
$$y = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x] \quad (20)$$

Como que C_1 e C_2 são constantes arbitrárias reais ou complexas. Então, podemos formar C_1 e C_2 como complexos conjugados. Portanto, podemos escrever $A \equiv C_1 + C_2$ e $B \equiv i(C_1 - C_2)$ para formarmos um par de constantes arbitrárias reais. Isso fornece

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad (21)$$

Até agora (21) pode ainda ser expressa convenientemente multiplicando e dividindo por $\mu \equiv \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$y = \mu e^{\alpha x} \left(\frac{A}{\mu} \cos \beta x + \frac{B}{\mu} \sin \beta x \right) \quad (22)$$



Definimos ainda um ângulo δ tal que

$$\sin \delta = \frac{B}{\mu}, \quad \cos \delta = \frac{A}{\mu} \quad \text{e} \quad \tan \delta = \frac{B}{A}$$

Assim, a solução y tornase

$$y = \mu e^{\alpha x} (\sin \delta \cos \beta x + \cos \delta \sin \beta x)$$

$$y = \mu e^{\alpha x} \sin(\beta x + \delta)$$